**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Алгебра

Algebra

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 7

Регистрационный номер рабочей программы: 003565

2021

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение учащихся бакалавриата, специализирующихся в области программной инженерии и математического обеспечения информационных систем, основам современной алгебры, позиционирование алгебраических методов среди математических подходов к информационным технологиям; развитие у обучающихся доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических дисциплин.

Поставленные цели достигаются путём решения следующих задач курса: освоение обучающимися как принципов построения, так и содержательной части современных математических теорий, навыков профессионального математического мышления, умение квалифицированно и эффективно выбирать и использовать конкретный алгебраический аппарат в решении практических задач

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для освоения дисциплины обучающиеся должны обладать начальными навыками доказательного мышления, уметь оперировать с целыми числами, дробями и многочленами, как предусмотрено программой средней школы.

**1.3. Перечень результатов обучения (learningoutcomes)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Планируемые результаты обучения, обеспечивающие формирование компетенции | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Общепрофессиональные компетенции | ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности. | • знать и понимать содержание общего курса алгебры и теории чисел, иметь представление о возможностях применения алгебраических методов в различных прикладных областях науки и техники;  • свободно владеть материалом, уметь связывать между собой понятия и факты из различных частей изучаемого курса;  • освоить технику вычислений, основанную на изучаемом курсе: обращение с комплексными числами, решение алгебраических уравнений в радикалах, решение систем линейных уравнений, оперирование матрицами и т. д., приобрести профессиональные знания и умения применения алгебраических методов в различных прикладных областях науки и техники. | ОПК-1.1 Уметь идентифицировать возможные проблемы и пути их решения |

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

В данном курсе, как правило, применяются классические аудиторные методы. Наряду с этим в рамках самостоятельной работы предусматривается внеаудиторное освоение материала с использованием учебников и учебных пособий, а также текста некоторых разделов курса, представляемого лектором.

Объем активных и интерактивных форм учебных занятий – 50 ак. ч.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 1 | 48 |  | 2 | 45 |  |  |  |  | 5 |  |  |  | 28 |  | 52 |  | 40 | 5 |
|  | 2-45 |  | 2-25 | 2-25 |  |  |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 2 | 15 |  |  | 15 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 30 |  | 10 |  | 10 | 2 |
|  | 2-45 |  |  | 2-25 |  |  |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 63 |  | 2 | 60 |  |  |  |  | 7 |  |  |  | 58 |  | 62 |  |  | 7 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 1 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 2 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**Первый семестр**

I) Введение (6 час. лекции, 4 час. практические занятия, 2 часа сам. работа по методическим материалам)

Тема 1. «Отображения и операции». Операции над множествами. Отображения. Композиция отображений, обратимые отображения. Бинарные алгебраические действия, польская запись. Определение группы и кольца. Группа перестановок. Замкнутость отностительно операции.

Тема 2. «Отношения»

Бинарные отношения, эквивалентность, примеры. Фактормножество и разбиения. Соответствия и их композиция. Отношения порядка, максимальный и набольший элементы. Операция на фактормножестве.

II) Делимость в кольцах. Целые числа (12 час. л., 12 час. пр. , 2 часа самост. раб.)

Тема 1. «Наибольший общий делитель в кольце главных идеалов».

Свойства делимости в коммутативном кольце с 1. Ассоциированность. Теорема о делении с остатком в кольце целых чисел, алгоритм Евклида. Теорема о линейном представлении НОД. Взаимно простые элементы в ОГИ и их свойства.

Тема 2. «Разложение на множители». Простые и неприводимые элементы. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение целого числа. Формула для числа делителей. Нахождение НОД и НОК.

Тема 3. «Сравнения». Сравнения и кольца вычетов. Обратимые классы. Теоретико-числовая функция Эйлера. Полная и приведенная системы вычетов.

Тема 4. «Порядок элемента в группе». Группа, порождённая набором элементов. Циклические группы и их классификация, порядок элемента в циклической группе.

Цикленная запись перестановки и вычисление ее порядка. Порождение группы перестановок транспозициями. Теорема Лагранжа для конечных абелевых групп и теорема Эйлера. Дискретный логарифм.

Тема 5. «Китайская теорема об остатках».

Гомоморфизмы колец. Теоретико-кольцевая версия китайской теоремы об остатках. Мультипликативность функции Эйлера. Формула для вычисления функции Эйлера. Криптографический алгоритм RSA.

III) Многочлены и комплексные числа (10 час. л., 10 час. пр., 4 час. сам. работа по методическим материалам)

Тема 1. «Многочлены от одной переменной». Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с 1. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Значение многочлена в точке, функциональное равенство многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Корень многочлена, теорема о числе корней. Сравнения многочленов и вычисления в факторкольце кольца многочленов. Избавление от иррациональности в знаменателе.

Тема 2. «Комплексные числа — основные определения». Определение поля комплексных чисел. Построение поля комплексных чисел как факторкольца. Комплексное сопряжение. Действия в компонентах и извлечение квадратного корня.

Модуль и аргумент.

Умножение на комплексное число как преобразование комплексной плоскости. Тригонометрическая форма записи, связь с действиями.

Дробно-линейные преобразования комплексной плоскости. Сохранение прямой и окружности.

Тема 3. «Формула Муавра». Формула Муавра и ее применение в вещественных вычислениях. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из 1.

Тригонометрические приложения комплексных чисел.

Тема 4. «Многочлены с комплексными коэффициентами». Решение алгебраических уравнений. Формулировка основной теоремы алгебры. Канонические разложения комплексных и вещественных многочленов.

Тема 5. «Производная и кратные корни». Производная многочлена. Кратные корни и их связь с производной. Освобождение от кратных корней. Формула Тейлора. Интерполяционная задача с простыми и кратными узлами. Метод Ньютона и интерполяционная формула Лагранжа.

Тема 6. «Поле частных и рациональные функции». Конструкция поля частных для произвольной области целостности. Поле рациональных функций. Разложение функции в сумму многочлена и правильной дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших. Формула Лагранжа разложения на простейшие дроби.

IV) Системы линейных уравнений и векторные пространства (12 час. л., 10 час. пр., 6 час. сам. работа по методическим материалам)

Тема 1. «Пространство и его базис». Определение пространства, примеры. Система образующих. Линейно независимая система. Три определения базиса пространства, их эквивалентность. Размерность пространства.Разложение вектора по базису, однозначность определения координат. Изменение координат при замене базиса. Матрица перехода и ее свойства.

Определение подпространства, его размерность. Факторпространство и его размерность. Сумма и пересечение подпространств, связь между размерностями. Прямая сумма подпространств

Тема 2. «Линейные отображения и матрицы».

Сложение матриц, умножение матрицы на скаляр. Умножение матриц. Единичная матрица. Транспонирование. Свойства матричных операций.

Действия над линейными отображениями. Универсальное свойство базиса. Линейное отображение умножения на матрицу между арфиметическими векторными пространствами.

Матрица линейного отображения. Вычисление линейного отображения в координатах. Матрица поворота на декартовой плоскости. Умножение матриц и композиция линейных отображений.

Матрица перехода между базисами. Преобразование матрицы линейного отображения при замене координат. Канонический вид матрицы линейного отображения.

V) Вычислительная линейная алгебра (8 час. лекции, 9 час. практические занятия, 16 час. сам. работа по методическим материалам)

Тема 1. «Ранг матрицы».

Ранг матрицы как размерность линейной оболочки ее строк, столбцов.

Ранг линейного отображения.

Размерность пространства решений линейной однородной системы.

Структура множества решений линейной неоднородной системы. Условия разрешимости и определенности для системы линейных уравнений. Ранг произведения матриц.

Тема 2. «Элементарные преобразования». Алгоритм Гаусса решения линейной системы. Элементарные преобразования и элементарные матрицы. Порождение группы обратимых матриц элементарными трансвекциями и дилатациями. Алгоритм поиска обратной матрицы.

Тема 3. «Понятие определителя». Определители второго и третьего порядков. Знак перестановки. Вычисление знака перестановки по ее цикленной записи. Кососимметрические и полилинейные отображения, аксиоматическое определение определителя. Формула полного развертывания для детерминанта квадратной матрицы произвольного порядка. Определитель транспонированной матрицы

Тема 4. «Свойства определителей». Теорема существования определеителя (проверка свойств кососимметричнсости и линейности).

Разложение по строке. Взаимная матрица. Формулы Крамера для обратной матрицы и для решения системы линейных уравнений.

Определитель блочно-треугольной матрицы. Определитель произведения квадратных матриц.

Тема 5. «Методы вычисления определителей». Вычисление определителей при помощи элементарных преобразований. Вычисление определителей индукцией по размеру матрицы. Определитель Вандермонда, связь с интерполяционной задачей. Кососимметрический многочлен и вычисление знака перестановки в терминах инверсий.

**Промежуточная аттестация**. Сам. работа -52 ак. ч., зачет – 2 ак. ч., консультация – 2 ак.ч., экзамен – 3 ак.ч.

**Второй семестр**

VI) Пространства с операторами (6 ак.ч. лекции, 6 час. пр., 6 час. самост. раб.)

Тема 1. «Собственные числа и собственные векторы».

Определение собственных чисел и собственных столбцов матрицы и оператора, характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Диагонализация матрицы оператора при отсутствии кратных собственных чисел.

Собственные числа вещественной симметрической матрицы.

Тема 2. «Приведение матрицы оператора к каноническому виду».

Корневые векторы линейного оператора. Разложение на корневые подпространства. Приведение матрицы размеров 2 на 2 и 3 на 3 к жордановой форме. Приложение к линейным рекуррентным последовательностям: оператор сдвига на пространстве последовательностей, его собственные и корневые векторы.

Линейные пространства

VII) Пространства с формами (4 час. л., 4 час. пр., 20 час. самост. раб.)

Тема 1. «Квадратичные формы». Квадратичная форма как однородный многочлен. Матрица формы, изменение при линейной замене переменных. Квадратичная форма на пространстве, связь с однородными многочленами. Полярная к квадратичной симметрическая билинейная форма. Метод Лагранжа приведения к диагональному виду. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Теорема Якоби. Положительно определенные квадратичные формы.

VIII) Элементы теории конечных полей (5 час. лекции, 5 час. практические занятия, 4 часа сам. работа по методическим материалам)

Тема 1. «Расширения полей». Конечные и алгебраические расширения. Минимальный многочлен алгебраического элемента. Конструкция присоединения корня неприводимого многочлена к полю.

Тема 2. «Конечные поля». Характеристика поля. Число элементов в конечном поле. Автоморфизм Фробениуса. Теорма существования и единственности конечного поля. Мультипликативная группа конечного поля.

Тема 3. «Приложения конечных полей». Периодические линейные рекуррентные последовательности над конечным полем. Период чисел Фибоначчи по простому модулю. Понятие о линейных кодах. Циклические коды. Проверочная и порождающая матрица кода. Код Хэмминга. Коды Боудхури-Хоквингема, исправляющие ошибки.

**Промежуточная аттестация**. Сам. работа -10 ак. ч., зачет – 2 ак. ч.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Во время занятий могут цитироваться и демонстрироваться выдержки из следующих источников:

1. Р. А. Шмидт, Алгебра, СПб, 2008.
2. Э.Б. Винберг, Курс алгебры, М., 2002.
3. А. И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры, М., 2004
4. А. И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра, М., 2000
5. А. И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры, М., 2004
6. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М., 2007.
7. Р. Лидл, Г. Нидеррайтер, Конечные поля, М., 1988.
8. Задачи по алгебре. Линейная алгебра, СПб, 2003. <https://studfiles.net/preview/6131993/>

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Перечень примерных вопросов для самостоятельной работы студентов  
• Определения евклидова и унитарного пространств. Примеры.  
• Матрица Грама для скалярного произведения.  
• Ортонормированные базисы пространства. Унитарная и ортогональная группы.  
• Процесс ортогонализации.  
• Свойства ортогонального дополнения относительно скалярного произведения. Разложение пространства в ортогональную прямую сумму подпространств.  
• Квадратичная форма как многочлен. Матрица квадратичной формы, ее изменение при линейном преобразовании переменных. Квадратичные формы и симметрические матрицы.  
• Определение квадратичной формы на линейном пространстве.  
• Примеры. Связь с квадратичной формой как многочленом.  
• Теорема Лагранжа о квадратичных формах. Приведение квадратичной формы как многочлена к диагональному виду с помощью специальных неособенных преобразований переменных.  
• Матрица квадратичной формы как отображения, ее изменение при замене базиса. Ранг квадратичной формы. Каноническая матрица квадратичной формы на комплексном пространстве.  
• Каноническая матрица квадратичной формы на вещественном пространстве. Индексы инерции.  
• Теорема Якоби.  
• Положительно определенные квадратичные формы. Критерии.  
• Приведение вещественной квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием переменных (без доказательства существования).

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

**Методика проведения самостоятельных работ (промежуточный контроль)**

Контрольная работа состоит из нескольких задач по определенным темам. Количество задач зависит от номера контрольной самостоятельной работы. Полностью не решенные задачи не зачитываются. Частично не решенная задача (пометка «+-»), может быть зачтена после собеседования с преподавателем.

**Методика проведения зачета в первом семестре**

Зачет выставляется по результатам работы в семестре на зачетном занятии.

Для получения отметки «зачтено» необходимо, чтобы были зачтены задачи по всем темам, включая как задачи из самостоятельных работ, так и личные домашние задания.

На зачет отводится 2 академических часа. Во время проведения зачета обучающемуся предоставляется возможность выполнить задания по всем темам, которые не были зачтены в результате проведения текущего контроля успеваемости. Задания можно выполнять в произвольном порядке.

Вторая и третья (с комиссией) попытка сдачи зачета по процедуре проведения аналогична зачетному занятию. При сдаче зачета с комиссией работа проверяется не одним, а тремя преподавателями. Преподаватель, проводивший текущий контроль успеваемости предоставляет комиссии все материалы по текущему контролю успеваемости обучающегося.

**Методика проведения текущего контроля успеваемости в форме коллоквиума**

На подготовку к коллоквиуму выделяется один день. Коллоквиум проводится в форме

теста из 10 вопросов и устного ответа по билетам.

В качестве тестовых используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе определения, основные формулы. На подготовку тестовой части отводится 50 мин.

Билет содержит один вопрос, который следует подготовить с полным доказательством. На подготовку к ответу отводится не менее 30 минут. После ответа на основные вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на коллоквиум. , основные графики.

За ответ выставляется оценка «не удовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично» по пятибалльной шкале и оценка A, B, C, D, E или F по шкале ECTS.

В случае получения оценки «неудовлетворительно» (ECTSF), билет с вопросами к коллоквиуму выносится на экзамен. В остальных случаях обучающийся имеет право пересдать билет коллоквиума по желанию, о чем следует заявить преподавателю в момент выдачи билетов на экзамене. При ответе на экзамене билетов коллоквиума и экзамена, время на подготовку устного ответа увеличивается до 2 академических часов.

**Методика проведения экзамена**

Экзамен проводится в устной форме. Билет 2 вопроса на подготовку к ответу в аудитории отводится не менее 1 академического часа.

После ответа на основные вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на экзамен (коллоквиум). В качестве дополнительных, используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе определения, основные формулы. Также студенту может быть вариант тестовой работы с 10 вопросами на 50 мин. в случае правильных ответов менее чем, на 5 вопросов теста ставится оценка "неудовлетворительно" (ECTSF).

Зачет во втором семестре проводится по той же методике, что и экзамен в первом семестре.

Выдается билет из двух вопросом, со временем подготовки 1 час.

Критерием допуска к зачету является выполнение всех (двух) личных домашних заданий, полученных во втором семестре и успешное написание самостоятельной работы.

**Критерии оценивания на экзамене**

| Уровень освоения материала | Оценка ECTS | Аттестация СПбГУ |
| --- | --- | --- |
| Ответ на вопросы билета и доп. вопросы без замечаний | A | Отлично |
| Ответ на вопросы билета и доп. вопросы не более, чем с двумя несущественными неточностями | B | Хорошо |
| Наличие более двух (или одной существенной) неточностей, но без грубых ошибок | C |
| Наличие грубой ошибки в ответе | D | Удовлетв. |
| Наличие в ответе более одной грубой ошибки, неполный ответ на один из вопросов | E |
| Остальные случаи | F | Неуд. |

**Критерии оценивания на зачете по шкале ECTS**

| Уровень освоения материала | Оценка ECTS | Аттестация СПбГУ |
| --- | --- | --- |
| Выполнены все задания, не менее 90% заданий сделано не более чем за две попытки | A | Зачтено |
| Выполнены все задания, не менее 80% заданий сделано не более чем за две попытки | B |
| Выполнены все задания, не менее 70% заданий сделано не более чем за две попытки | C |
| Выполнены все задания, не менее 60% заданий сделано не более чем за две попытки | D |
| Выполнены все задания, более 40% заданий сделано более чем за две попытки | E |
| Не выполнены требования для оценки «зачтено» | F | Не зачтено |

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Комплекты вариантов контрольных работ.

Примерный перечень вопросов к зачету (экзамену) по всем модулям дисциплины на текущий период обучения.

Примерный перечень вопросов к экзамену на текущий период обучения

Объединение, пересечение, разность, декартова степень множеств. Разбиение.

Бинарное отношение. Примеры. Эквивалентность. Связь эквивалентностей с разбиениями.

Отображение. Инъективные, сюръективные, биективные отображения. Ограничение, сужение, срезка. Примеры.

Композиция отображений. Свойства.

Обратимые отображения.

Бинарная алгебраическая операция.

Группа. Примеры.

Изоморфность групп.

Подгруппа, критерий. Примеры подгрупп.

Кольцо. Область целостности, поле, тело. Примеры. Изоморфность колец.

Делимость в коммутативном кольце с 1, свойства. Ассоциированность.

Наибольший общий делитель в евклидовом кольце.

Взаимно простые элементы в евклидовом кольце.

Простые элементы. Примеры. Свойства простых.

Основная теорема арифметики.

Теорема о делении с остатком для целых чисел. Каноническое разложение натурального числа. Бесконечность множества простых чисел.

Класс вычетов по данному модулю. Полная система вычетов. Кольцо вычетов и его свойства.

Обратимые классы вычетов. Приведенная система вычетов.

Характеристика поля. Примеры.

Теоретико-числовая функция Эйлера и ее свойства.

Китайская теорема об остатках.

Кольцо многочленов. Построение.

Степень многочлена от одной переменной, свойства степени. Теорема о делении с остатком для многочленов.

Теоремы Безу и Декарта. Число корней многочлена.

Многочлены от нескольких переменных. Степень и ее свойства.

Теорема о тождестве.

Поле комплексных чисел. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Действия в компонентах. Комплексное сопряжение и его свойства.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент. Неравенства для модуля.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа, связь с действиями. Формула Муавра.

Извлечение корня из комплексного числа.

Комплексные корни из 1.

Решение уравнений третьей и четвертой степеней. Разрешимость уравнений в радикалах.

Неприводимые многочлены. Алгебраическая замкнутость поля. Основная теоремы алгебры и ее следствия.

Матрицы. Сложение и умножение на скаляр.

Умножение матриц. Ассоциативность умножения.

Транспонированная матрица. Свойства транспонирования.

Ранг матрицы в терминах ее миноров. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Ранг трапециевидной матрицы.

Система линейных уравнений. Матричная запись. Теорема Кронекера--Капелли.

Метод Гаусса решения линейной системы. Число решений системы. Главные и свободные неизвестные.

Однородные системы линейных уравнений.

Многочлен от матрицы. Определитель произведения квадратных матриц. Невырожденные матрицы, полная линейная группа.

Взаимная матрица и ее свойства. Обратная матрица, методы ее вычисления.

Линейное пространство. Определение, примеры, простейшие свойства.

Линейная оболочка семейства векторов. Подпространство. Порождающее семейство.

Линейная зависимость и независимость.

Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций.

Базис и его равносильные описания.

Размерность. Координаты. Изоморфность конечномерного пространства арифметическому.

Изменение координат при замене базиса.

Сумма и пересечение подпространств. Связь их размерностей.

Прямая сумма подпространств.

Производная многочлена. Свойства. Кратность корня и производная.

Формула Тейлора.

Теорема Гаусса (формулировка). Неприводимые многочлены над полями вещественных и комплексных чисел.

Поле частных области целостности. Построение поля частных.

Поле дробно-рациональных функций. Правильные дроби.

Простейшие дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.

Формула Лагранжа разложения на простейшие.

Интерполяционная задача. Интерполяция по Ньютону и по Лагранжу.

Кольцо многочленов от нескольких переменных. Основные понятия.

Матрица линейного отображения, ее свойства.

Изменение матрицы линейного отображения при замене базиса

Ядро и образ линейного отображения, их размерности

Каноническая матрица линейного отображения.

Критерий изоморфности линейного отображения.

Пространство линейных отображений, его связь с матричными пространствами.

Композиция отображений и матричное умножение. Изоморфизмы и обратимые матрицы.

Алгебра линейных операторов.

Критерий обратимости линейного оператора.

Примерный список вопросов к зачету по второму семестру.

Инвариантное подпространство. Операторы, ассоциированные с инвариантным подпространством.

Матрица оператора при наличии инвариантных подпространств.

Собственное число и собственный вектор оператора. Примеры.

Матрица оператора относительно собственного базиса.

Характеристический многочлен оператора. Теорема Гамильтона—Кэли для операторов.

Собственные подпространства и их свойства.

Диагонализуемые операторы. Критерий диагонализуемости.

Аннулятор вектора относительно оператора. Свойства аннуляторов.

Минимальный аннулятор вектора.

Циклическое подпространство. Клетка Фробениуса.

Примарные подпространства и их свойства. Корневые подпространства.

Формулировка теоремы Жордана

Определение квадратичной формы на линейном пространстве.

Примеры. Связь с квадратичной формой как многочленом.

Теорема Лагранжа о квадратичных формах. Приведение квадратичной формы как многочлена к диагональному виду с помощью специальных неособенных преобразований переменных.

Матрица квадратичной формы как отображения, ее изменение при замене базиса. Ранг квадратичной формы. Каноническая матрица квадратичной формы на комплексном пространстве.

Каноническая матрица квадратичной формы на вещественном пространстве. Индексы инерции.

Теорема Якоби.

Конечные и алгебраические расширения. Минимальный многочлен алгебраического элемента.

Конструкция присоединения корня неприводимого многочлена к полю.

Характеристика поля. Число элементов в конечном поле.

Автоморфизм Фробениуса.

Теорема существования и единственности конечного поля.

Мультипликативная группа конечного поля.

Периодические линейные рекуррентные последовательности над конечным полем.

Период чисел Фибоначчи по простому модулю.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции | Контрольно-измерительные материалы (КИМ) (тестовые вопросы, контрольные задания, кейсы и пр.) |
|  | 1 | 2 |
| 1 | ОПК-1.1 Уметь идентифицировать возможные проблемы и пути их решения | Ответ на каждый вопрос билетов и на дополнительные вопросы, на которые обучающийся отвечает на экзамене первого семестра и зачёте второго семестра, оценивается по шкале от 0 (нет ответа) до 10 (очень хороший ответ), далее оценка усредняется. Результат переводится в диапазон от 0 до 100 |

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень кандидата или доктора наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности). Преподаватели, привлекаемые к проведению практических занятий, должны иметь базовое образование и/или ученую степень, соответствующие профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не предполагается.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные стандартным оборудованием, используемым для обучения в СПбГУ в соответствии с требованиями материально-технического обеспечения

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование, используемое для обучения в СПбГУ. MSWindows, MSOffice, MozillaFireFox, GoogleChrome, AcrobatReaderDC, WinZip, АнтивирусКасперского

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не предусматриваются.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не предусматриваются.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Не предусматриваются.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список литературы**

1. Д. К. Фаддеев, Лекции по алгебре, СПб, 2002.
2. З.И. Боревич, Определители и матрицы, СПб, 2001.
3. А. А. Семенов, Р. А. Шмидт, Начала алгебры, СПб, 2002.
4. Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский, Задачи по высшей алгебре, СПб, 2001.
5. Задачи по алгебре. Комплексные числа и многочлены. СПб, 2011.
6. Задачи по алгебре. Основы теории чисел, СПб, 2008.
7. Задачи по алгебре. Основы теории групп, СПб, 1996.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

• Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: <http://www.library.spbu.ru/>

• Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: <http://www.library.spbu.ru/cgi-bin/irbis64r/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS>

• Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/>

• Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource%20type=8>

**Раздел 4. Разработчики программы**

Пименов Константин Игоревич канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра высшей алгебры и теории чисел, k.pimenov@spbu.ru  
Нестеров Владимир Викторович, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель, кафедра высшей алгебры и теории чисел, st804083@mail.spbu.ru